2.5. Bijekcije i inverzne funkcije

22.10. 2020.

Fotografija: Stephen Walker

Bijekcija

Definicija. Funkcija $f : D \to K$ je **bijekcija** ako

za svaki $y \in K$ postoji točno jedan $x \in D$ takav da je $f(x) = y$.

(Nepreciznije: "Svaki $y \in K$ pogođen je točno jednom.")

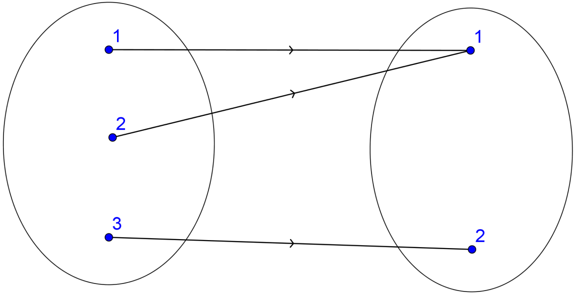
Bijekcija

Definicija. Funkcija $f : D \to K$ je **bijekcija** ako

$$\text{za svaki } y \in K \text{ postoji točno jedan } x \in D \text{ takav da je } f(x) = y.$$

(Nepreciznije: "Svaki $y \in K$ pogođen je točno jednom.")

PR.:



$\rightsquigarrow$ Nije bijekcija ($1 \in K$ je pogođen dvaput).

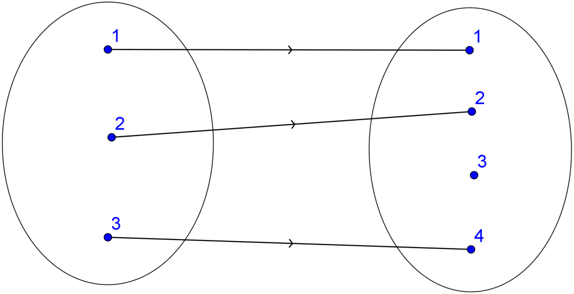
Bijekcija

Definicija. Funkcija $f : D \to K$ je **bijekcija** ako

$$\text{za svaki } y \in K \text{ postoji točno jedan } x \in D \text{ takav da je } f(x) = y.$$

(Nepreciznije: "Svaki $y \in K$ pogođen je točno jednom.")

PR.:



$\rightsquigarrow$ Nije bijekcija ($3 \in K$ je pogođen 0 puta).

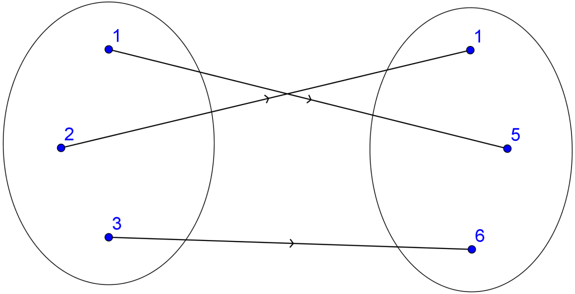
Bijekcija

Definicija. Funkcija $f : D \to K$ je **bijekcija** ako

$$\text{za svaki } y \in K \text{ postoji točno jedan } x \in D \text{ takav da je } f(x) = y.$$

(Nepreciznije: "Svaki $y \in K$ pogođen je točno jednom.")

PR.:



$\leadsto$ Bijekcija (svaki $y \in K$ pogođen je točno jednom).

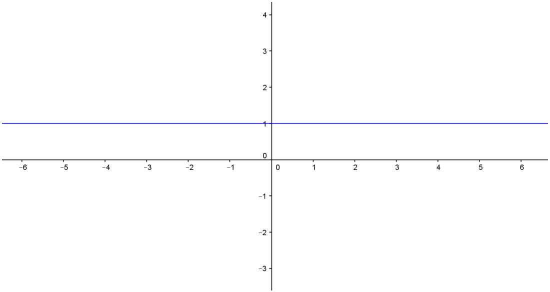
Bijekcija

Definicija. Funkcija $f : D \to K$ je **bijekcija** ako

$$\text{za svaki } y \in K \text{ postoji točno jedan } x \in D \text{ takav da je } f(x) = y.$$

(Nepreciznije: "Svaki $y \in K$ pogođen je točno jednom.")

PR.:



$\rightsquigarrow$ $f(x) := 1$ nije bijekcija ($1 \in K = \mathbb{R}$ je pogođen ∞, a svaki $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 0 puta).

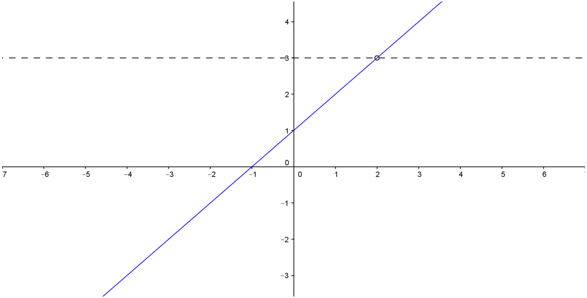
Bijekcija

Definicija. Funkcija $f : D \to K$ je **bijekcija** ako

$$\text{za svaki } y \in K \text{ postoji točno jedan } x \in D \text{ takav da je } f(x) = y.$$

(Nepreciznije: “Svaki $y \in K$ pogođen je točno jednom.”)

PR.:



$\rightsquigarrow$ $f(x) := x + 1$ je bijekcija (svaki $y \in K = \mathbb{R}$ pogođen je točno jednom).

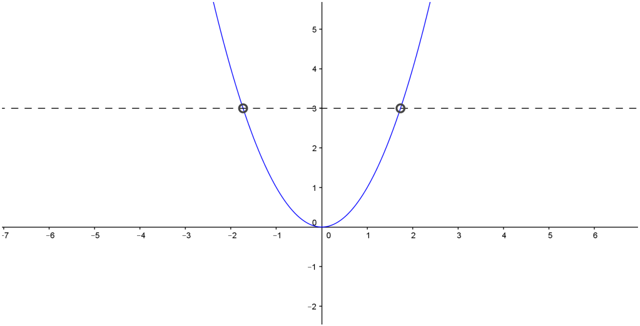
Bijekcija

Definicija. Funkcija $f : D \to K$ je **bijekcija** ako

$$\text{za svaki } y \in K \text{ postoji točno jedan } x \in D \text{ takav da je } f(x) = y.$$

(Nepreciznije: “Svaki $y \in K$ pogođen je točno jednom.”)

PR.:



$\rightsquigarrow$ $f(x) := x^2$ nije bijekcija (npr. $y = 3 \in K = \mathbb{R}$ je pogođen dvaput).

Inverzna funkcija

Funkcija $g : K \to D$ **inverzna** je funkciji $f : D \to K$ ako vrijedi

$$g(f(x)) = x \qquad \text{za sve } x \in D$$

i

$$f(g(y)) = y \qquad \text{za sve } y \in K.$$

Oznaka: $g =: f^{-1}$.

Inverzna funkcija

Funkcija $g : K \to D$ **inverzna** je funkciji $f : D \to K$ ako vrijedi

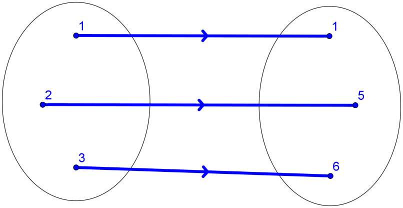
$$g(f(x)) = x \qquad \text{za sve } x \in D$$

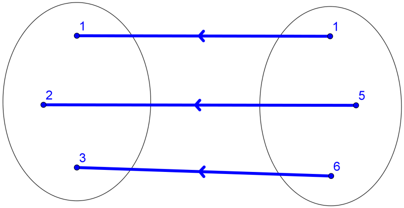
i

$$f(g(y)) = y \qquad \text{za sve } y \in K.$$

Oznaka: $g =: f^{-1}$.

Primjer: f f^{-1}





Inverzna funkcija

Teorem. Funkcija $f : D \to K$ ima inverznu funkciju ako i samo ako je bijekcija, i u tom je slučaju njena inverzna funkcija f^{-1} jedinstvena.

Teorem. Funkcija $f : D \to K$ ima inverznu funkciju ako i samo ako je bijekcija, i u tom je slučaju njena inverzna funkcija f^{-1} jedinstvena.

Poanta pojma inverzne funkcije (za bijekciju $f : D \to K$):

$$x \overset{f}{\longmapsto} y \qquad \Leftrightarrow \qquad x \overset{f^{-1}}{\longleftarrow\!\!\!\shortmid} y,$$

tj.

$$f(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y).$$

Zadatak 11(a)

Ispitajte je li funkcija

$$f(x) := 2x + 1$$

bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Zadatak 11(a)

Ispitajte je li funkcija

$$f(x) := 2x + 1$$

bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Rješenje. Primijetimo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

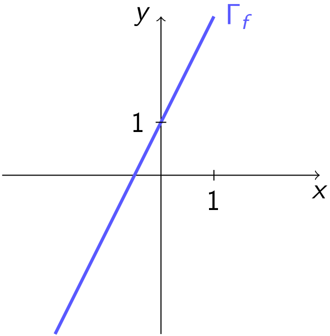
Zadatak 11(a)

Ispitajte je li funkcija

$$f(x) := 2x + 1$$

bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Rješenje. Primijetimo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Zadatak 11(a)

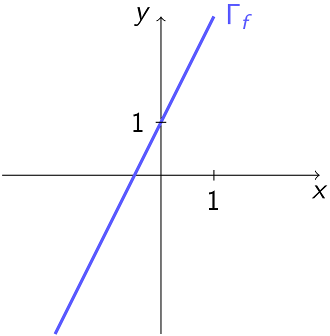
Ispitajte je li funkcija

$$f(x) := 2x + 1$$

bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Rješenje. Primijetimo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sa skice grafa vidimo da je f bijekcija.



Zadatak 11(a)

Ispitajte je li funkcija

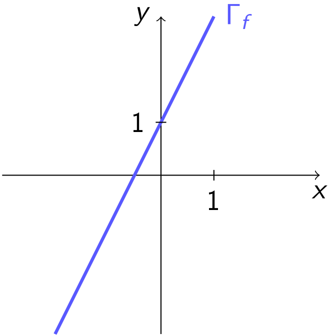
$$f(x) := 2x + 1$$

bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Rješenje. Primijetimo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sa skice grafa vidimo da je f bijekcija.

Odredimo f^{-1}.



Zadatak 11(a)

Ispitajte je li funkcija

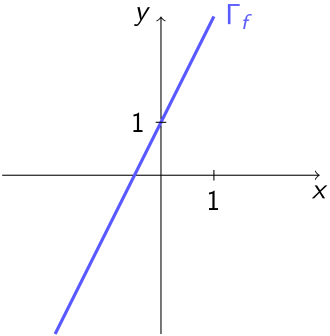
$$f(x) := 2x + 1$$

bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Rješenje. Primijetimo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sa skice grafa vidimo da je f bijekcija.

Odredimo f^{-1}. Jasno, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Zadatak 11(a)

Ispitajte je li funkcija

$$f(x) := 2x + 1$$

bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

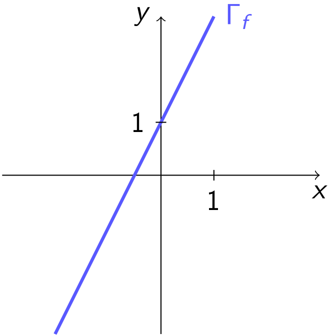
Rješenje. Primijetimo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sa skice grafa vidimo da je f bijekcija.

Odredimo f^{-1}. Jasno, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sjetimo se:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$



Zadatak 11(a)

Ispitajte je li funkcija

$$f(x) := 2x + 1$$

bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Rješenje. Primijetimo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sa skice grafa vidimo da je f bijekcija.

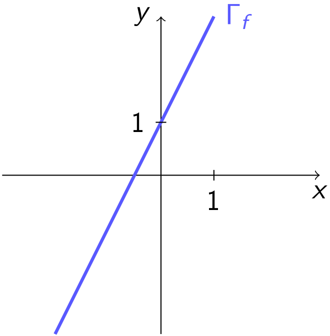
Odredimo f^{-1}. Jasno, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sjetimo se:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$

Kod nas:

$$f(x) = y \;\Leftrightarrow\; 2x + 1 = y \;\Leftrightarrow\; x = \frac{y-1}{2}.$$



Zadatak 11(a)

Ispitajte je li funkcija

$$f(x) := 2x + 1$$

bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Rješenje. Primijetimo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sa skice grafa vidimo da je f bijekcija.

Odredimo f^{-1}. Jasno, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sjetimo se:

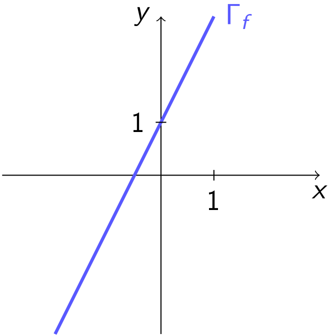
$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$

Kod nas:

$$f(x) = y \;\Leftrightarrow\; 2x + 1 = y \;\Leftrightarrow\; x = \frac{y-1}{2}.$$

Dakle,

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}.$$



Zadatak 11(a)

Ispitajte je li funkcija

$$f(x) := 2x + 1$$

bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Rješenje. Primijetimo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sa skice grafa vidimo da je f bijekcija.

Odredimo f^{-1}. Jasno, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sjetimo se:

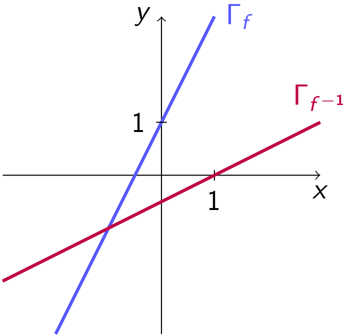
$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$

Kod nas:

$$f(x) = y \;\Leftrightarrow\; 2x + 1 = y \;\Leftrightarrow\; x = \frac{y-1}{2}.$$

Dakle,

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}.$$



Zadatak 11(a)

Ispitajte je li funkcija

$$f(x) := 2x + 1$$

bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Rješenje. Primijetimo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sa skice grafa vidimo da je f bijekcija.

Odredimo f^{-1}. Jasno, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sjetimo se:

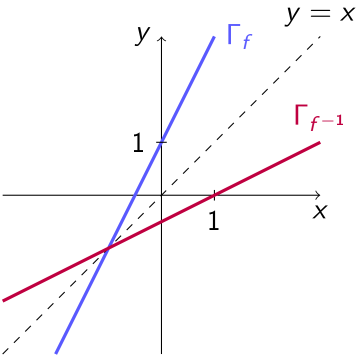
$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$

Kod nas:

$$f(x) = y \;\Leftrightarrow\; 2x + 1 = y \;\Leftrightarrow\; x = \frac{y-1}{2}.$$

Dakle,

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}.$$



Zadatak 11(a)

Ispitajte je li funkcija

$$f(x) := 2x + 1$$

bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Rješenje. Primijetimo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sa skice grafa vidimo da je f bijekcija.

Odredimo f^{-1}. Jasno, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sjetimo se:

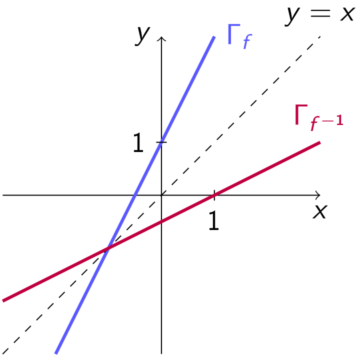
$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$

Kod nas:

$$f(x) = y \;\Leftrightarrow\; 2x + 1 = y \;\Leftrightarrow\; x = \frac{y-1}{2}.$$

Dakle,

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}.$$



Napomena. $\Gamma_{f^{-1}}$ uvijek se dobije iz Γ_f zrcaljenjem oko pravca $y = x$.

Zadatak 11(b)

Ispitajte je li funkcija

$$f(x) := \frac{1}{2x+1} \tag{1}$$

bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Zadatak 11(b)

Ispitajte je li funkcija

$$f(x) := \frac{1}{2x+1} \tag{1}$$

bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Rješenje. Primijetimo: $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$.

Zadatak 11(b)

Ispitajte je li funkcija

$$f(x) := \frac{1}{2x+1} \tag{1}$$

bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Rješenje. Primijetimo: $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$.

Zapišimo (1) u obliku $f(x) = y_0 + \frac{A}{x - x_0}$:

Zadatak 11(b)

Ispitajte je li funkcija

$$f(x) := \frac{1}{2x+1} \tag{1}$$

bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Rješenje. Primijetimo: $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$.

Zapišimo (1) u obliku $f(x) = y_0 + \frac{A}{x-x_0}$:

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

Zadatak 11(b)

Ispitajte je li funkcija

$$f(x) := \frac{1}{2x+1} \tag{1}$$

bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Rješenje. Primijetimo: $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$.

Zapišimo (1) u obliku $f(x) = y_0 + \frac{A}{x-x_0}$:

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{x - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$\rightsquigarrow x_0 = -\frac{1}{2},\ y_0 = 0,\ A = \frac{1}{2} > 0.$

Zadatak 11(b)

Ispitajte je li funkcija

$$f(x) := \frac{1}{2x+1} \tag{1}$$

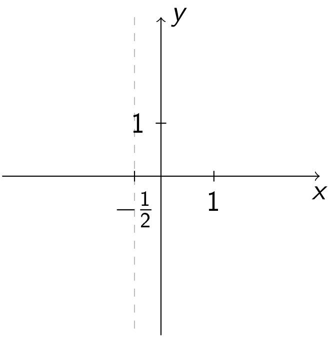
bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Rješenje. Primijetimo: $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$.

Zapišimo (1) u obliku $f(x) = y_0 + \frac{A}{x-x_0}$:

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$\rightsquigarrow x_0 = -\frac{1}{2},\ y_0 = 0,\ A = \frac{1}{2} > 0.$



Zadatak 11(b)

Ispitajte je li funkcija

$$f(x) := \frac{1}{2x+1} \tag{1}$$

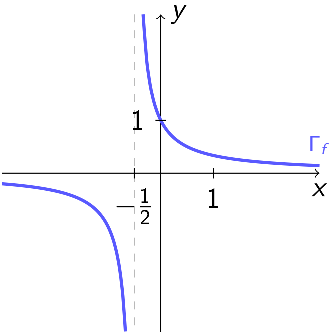
bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Rješenje. Primijetimo: $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$.

Zapišimo (1) u obliku $f(x) = y_0 + \frac{A}{x - x_0}$:

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{x - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$\rightsquigarrow x_0 = -\frac{1}{2},\ y_0 = 0,\ A = \frac{1}{2} > 0.$



Zadatak 11(b)

Ispitajte je li funkcija

$$f(x) := \frac{1}{2x+1} \tag{1}$$

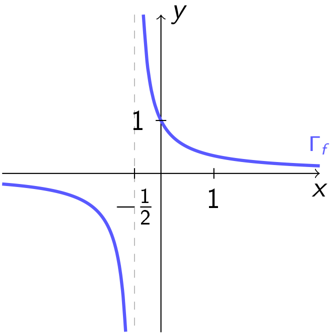
bijekcija i, ako jest, odredite f^{-1}.

Rješenje. Primijetimo: $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$.

Zapišimo (1) u obliku $f(x) = y_0 + \frac{A}{x-x_0}$:

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$\rightsquigarrow x_0 = -\frac{1}{2},\ y_0 = 0,\ A = \frac{1}{2} > 0.$



Sa skice grafa vidimo da f nije bijekcija (jer $0 \in K = \mathbb{R}$ nije "pogođena").